Министерство образования и науки Российской Федерации
Сибирский федеральный университет

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ЭЛЕКТРОСТАТИКЕ

Учебно-методическое пособие

Красноярск
СФУ
2012

УДК 537.2
ББК 22.331
Р470

Составитель: В.В. Денисенко

Р470 **Решение** задач по электростатике: учебно-методическое пособие [Текст] / сост. В.В. Денисенко. – Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2012. - 32 с.

Издание рекомендуется использовать при самостоятельной работе студентов по дисциплине "Физика". Содержит примеры решения задач по электростатике - первому разделу курса физики, который читается студентам ИМ СФУ, обучающимся по направлениям:

010100.62 Математика,

010300.62 Математика. Компьютерные науки,

010400.62 Прикладная математика и информатика.

Решение задач по каждой теме предваряется кратким изложением необходимого теоретического материала.

УДК 537.2
ББК 22.331
© Сибирский федеральный университет 2012

Содержание

Предисловие **4**

1. Силы и поля **4**

2. Закон Кулона **6**

3. Векторные поля **11**

3.1. Поток 12

3.2. Дивергенция 13

3.3. Циркуляция 16

3.4. Ротор 16

4. Циркуляция статического электрического поля **19**

5. Поток электрического поля **21**

6. Потенциал статического электрического поля **26**

Список литературы **31**

Предисловие

Пособие рекомендуется использовать при самостоятельной работе студентов. Содержит примеры решения задач по электростатике - первому разделу курса физики, который читается студентам ИМ СФУ, обучающимся по направлениям:

010100.62 Математика

010300.62 Математика. Компьютерные науки

010400.62 Прикладная математика и информатика

Планируется издание аналогичных пособий по другим темам теории электромагнитного поля, традиционно рассматриваемым после электростатики, "Решение задач об электрических токах"и "Решение задач по магнитостатике".

Ранее было издано учебное пособие, посвящённое решению задач по термодинамике и молекулярной физике [1].

Решение задач по каждой теме предваряется кратким изложением необходимого теоретического материала, как правило, заимствованного из учебника Савельева [3], который является основным учебником для данного курса физики. В качестве основного мы используем задачник Иродова [2], ограничиваясь не самыми сложными из приведённых там задач.

1 Силы и поля

Существуют разные способы описания взаимодействия тел. Примером первого способа может служить закон всемирного тяготения, в соответствии с которым имеющие массы m и M точечные тела, то есть тела, размеры которых малы по сравнению с расстоянием между ними, притягиваются с силой

$$F = \frac{\gamma m M}{r^2}, \tag{1}$$

где r – расстояние между телами, γ – гравитационная постоянная.

Будем характеризовать положение точек их радиус-векторами. Радиусом-вектором точки $\mathbf{r}$ называется вектор такого сдвига пространства, при котором начало координат переходит в эту точку. В декартовых координатах компоненты $\mathbf{r}$ совпадают с координатами точки $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Обозначим через $\mathbf{r}_m$ и $\mathbf{r}_M$ радиус-векторы точек, в которых располагаются рассматриваемые тела, и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_m - \mathbf{r}_M$. Очевидно, $r = |\mathbf{r}|$. Чтобы внести в запись закона (1) направление силы, используем единичный вектор нужного направления $\mathbf{r}/r$. Тогда на первое тело (с массой m) действует сила

$$\mathbf{F} = -\frac{\gamma m M}{r^2}\ \frac{\mathbf{r}}{r}, \tag{2}$$

а на второе тело $-\mathbf{F}$, что соответствует третьему закону Ньютона.

Второй способ описания взаимодействия тел базируется на следующем эксперименте. Будем помещать разные точечные тела в разные точки пространства и измерять действующие на них силы. Напомним, что сила $\mathbf{F}$ – это то, что вызывает ускорение $\mathbf{a}$ тела с инертной массой m в соответствии со вторым законом Ньютона

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}. \tag{3}$$

Обозначим через $\mathbf{r}(t)$ радиус-вектор точки, в которой располагается наше точечное тело в данный момент времени t. Тогда скорость $\mathbf{v}(t) = d\mathbf{r}(t)/dt$ и ускорение $\mathbf{a}(t) = d\mathbf{v}(t)/dt$ можно получить просто дифференцированием по времени результатов измерения $\mathbf{r}(t)$. Поэтому, зная массу m, силу несложно определить из простых наблюдений положения тела.

Оказывается, результаты экспериментов можно свести в выражение силы в виде

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g} + q\mathbf{E} + q[\mathbf{v} \times \mathbf{B}], \tag{4}$$

где скорость $\mathbf{v}$ и параметры m q, называемые гравитационной массой и зарядом, характеризуют тело, а векторы $\mathbf{g}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, наоборот, не зависят от свойств тела и присущи данной точке пространства. Установлено, что инертная и гравитационная массы, фигурирующие в (3) и (4), совпадают, и поэтому обозначаются одинаково и называются просто массой.

Векторы $\mathbf{g}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ характеризуют распределённые в пространстве материальные объекты иного вида, чем привычные нам тела. Это поля, гравитационное с напряжённостью $\mathbf{g}$, электрическое с напряжённостью $\mathbf{E}$ и магнитное, для которого вектор $\mathbf{B}$ называется магнитной индукцией, поскольку термин "напряжённость магнитного поля" оказался занятым для вспомогательной величины, удобной при расчётах устройств типа трансформаторов.

Если перейти к масштабам атома или элементарных частиц, добавляются иные силы, да и само используемое здесь классическое описание тел теряет смысл и должно быть заменено образами квантовой механики. Следует также заметить, что речь идет только о фундаментальных силах, к которым могут быть сведены все другие известные силы, например, упругость.

По современным представлениям тела создают поля, которые воздействуют на другие тела, а воздействие тел на расстоянии, как в законе (2), является лишь приближённым описанием. Например, при перемещении тела создаваемое им поле не может сразу измениться во всем пространстве, поскольку никакое возмущение в материальном мире не распространяется со скоростью большей, чем скорость света. Поэтому некоторое время другие тела будут "ощущать" поле в

своих точках пространства, соответствующее прежнему положению этого тела. Если же рассматривать стационарные процессы, закон (2) достаточно записать как

$$\mathbf{F} = m(-\frac{\gamma M}{r^2}\ \frac{\mathbf{r}}{r}) = m\mathbf{g}, \tag{5}$$

чтобы придать ему вид (4).

2 Закон Кулона

В классической формулировке закон Кулона выражает силу, действующую на точечное тело с зарядом q со стороны точечного тела с зарядом Q

$$\mathbf{F} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\ \frac{\mathbf{r}}{r}, \tag{6}$$

где $\mathbf{r}_q$ и $\mathbf{r}_Q$ – радиус-векторы точек, в которых располагаются рассматриваемые неподвижные тела, и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_q - \mathbf{r}_Q$.

Можно переформулировать закон Кулона (6) для напряжённости электрического поля $\mathbf{E}$ определённой в (4). Для упрощения формул поместим начало координат в точку, где располагается заряд Q. Тогда закон Кулона гласит, что заряд Q создаёт в окружающем пространстве электрическое поле с напряжённостью

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\ \frac{\mathbf{r}}{r}, \tag{7}$$

где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор произвольной точки, и если в эту точку поместить заряд q, на него будет действовать сила

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}. \tag{8}$$

Из (7, 8), очевидно, получается (6).

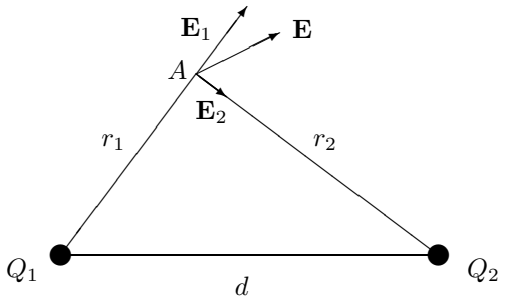
Важное свойство электрического поля выражается принципом суперпозиции: напряжённость электрического поля, создаваемого несколькими зарядами, равна сумме напряжённостей, создаваемым каждым зарядом в отдельности. Принцип суперпозиции позволяет находить поля, создаваемые сложными системами зарядов, как это демонстрируется решениями следующих задач.

Задача 1.

Два маленьких заряженных тела с зарядами $Q_1 = 20$ мкКл и $Q_2 = -10$ мкКл находятся на расстоянии $d = 5$ см. Третий точечный заряд $Q = 1$ мкКл помещён в точку, находящуюся от первых

тел на расстояниях $r_1 = 3$ см и $r_2 = 4$ см соответственно. Найти силу, действующую на третий заряд, и напряжённость электрического поля в этой точке.

<u>*Решение*</u>



Поскольку длины сторон удовлетворяют теореме Пифагора

$$r_1^2 + r_2^2 = 3^2 + 4^2 = 25 = d^2,$$

угол при вершине A треугольника прямой, и поэтому векторы напряжённостей электрического поля $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$, создаваемые зарядами Q_1 и Q_2 в точке A, перпендикулярны друг другу. Следовательно модуль напряжённости суммарного электрического поля в точке A равен:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2},$$

где

$$E_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}; \qquad E_2 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}.$$

Отсюда получаем:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \sqrt{\frac{Q_1^2}{r_1^4} + \frac{Q_2^2}{r_2^4}}.$$

Подставляем числовые значения:

$$E = \frac{1}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \sqrt{\frac{(20 \cdot 10^{-6})^2}{(0,03)^4} + \frac{(10 \cdot 10^{-6})^2}{(0,04)^4}}$$

$$E = 2,08 \cdot 10^8 \text{ В/м}.$$

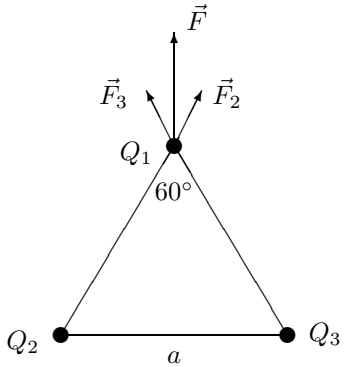
На заряд Q, помещённый в точку A, будет действовать сила

$$F = Q \cdot E = 1 \cdot 10^{-6} \cdot 2,08 \cdot 10^8 = 208 \text{ Н}.$$

Задача 2.

Три маленьких заряженных тела с зарядами $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 2$ нКл находятся в вершинах равностороннего треугольника со стороной $a = 10$ см. Найти силу, действующую на третий заряд.

<u>*Решение*</u>



Вектор суммарной силы $\vec{F}$, действующей на заряд Q_1, равен сумме векторов сил, действующих на заряд со стороны Q_2 и Q_3

$$\vec{F} = \vec{F}_2 + \vec{F}_3.$$

В силу симметрии горизонтальные проекции сил при суммировании дают нуль, и величина силы F равна сумме проекций $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$ на вертикальное направление:

$$F = F_2 \cos(30^\circ) + F_3 \cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (F_2 + F_3).$$

Так как

$$F_2 = F_3 = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}.$$

то получаем

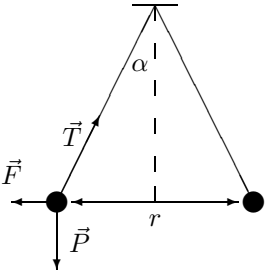
$$F = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 \cdot \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2} = \frac{\sqrt{3}Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2},$$

$$F = \frac{\sqrt{3} \cdot (2 \cdot 10^{-9})^2}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot (0,1)^2} = 6,23 \cdot 10^{-6} \text{ Н}.$$

Задача 3.

Два маленьких шарика массой $m = 2$ грамма каждый подвешены на общем крючке к потолку на нитях длиной $l = 0,5$ метра. Какие заряды надо поместить на шарики, чтобы нити образовали прямой угол?

Решение



Обозначим через Q_1, Q_2 через α_1, α_2 - углы отклонения нитей от вертикали. На левый шарик действуют сила кулоновского отталкивания $\vec{F}$, сила тяжести $\vec{P}$ и сила натяжения нити $\vec{T_1}$. На правый шарик действуют сила кулоновского отталкивания $-\vec{F}$, сила тяжести $\vec{P}$ и сила натяжения нити $\vec{T_2}$. Поскольку шарик не ускоряется, сумма всех сил равна нулю. Приравниваем нулю вертикальную и горизонтальную проекции суммарной силы, действующей на каждый из шариков:

$$T_1 \cos\alpha_1 = P; \qquad T_1 \sin\alpha_1 = F;$$

$$T_2 \cos\alpha_2 = P; \qquad T_2 \sin\alpha_2 = F.$$

Делим правые и левые части уравнений:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{F}{P}, \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{F}{P},$$

откуда получаем $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/4$ и

$$P = F.$$

Вес $P = mg$. Поскольку при полученных углах расстояние между шариками равно $2l\sin\alpha_1 = 2l/\sqrt{2} = \sqrt{2}\ l$, сила кулоновского отталкивания:

$$F = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 2l^2}.$$

Получаем:

$$Q = 2l\sqrt{2\pi\varepsilon_0 mg}.$$

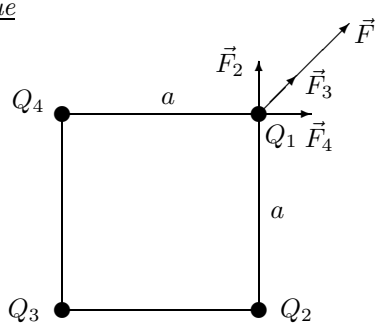
Подставляем числовые значения

$$Q = 2 \cdot 0,5 \cdot \sqrt{2 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,002 \cdot 9,81} = 3,3 \text{ мКл}.$$

Задача 4.

Четыре маленьких заряженных тела с зарядами $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = 40$ нКл находятся в вершинах квадрата со стороной $a = 10$ см. Найти силу, действующую на один из зарядов.

Решение



Так как все заряды одинаковы, то модули сил, действующих на каждый из зарядов, будут также одинаковы. Рассмотрим, например, силу, действующую на заряд Q_1. Она равна сумме сил, действующих на заряд Q_1 со стороны зарядов $Q_2,\ Q_3,\ Q_4$:

$$\vec{F} = \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4.$$

Так как $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_4$ взаимно перпендикулярны и равны по величине, то суммарная сила $\vec{F}$ направлена по диагонали, как показано на рисунке.

Величина суммарной силы равна

$$F = F_3 + F_2 \cdot \cos(45^\circ) + F_3 \cdot \cos(45^\circ) =$$

$$= F_3 + 2 \cdot F_2 \cdot \cos(45^\circ) = F_3 + \sqrt{2} \cdot F_2,$$

где

$$F_2 = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}; \qquad F_3 = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 (\sqrt{2}a)^2}.$$

Получаем:

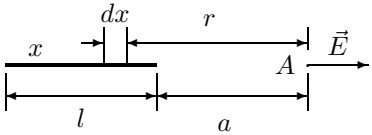
$$F = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \sqrt{2}\right) =$$

$$= \frac{(40 \cdot 10^{-9})^2}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}\ (0,1)^2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \sqrt{2}\right) = 2,76 \cdot 10^{-3}\ \text{Н}.$$

Задача 5.

Тонкий прямой стержень длиной $l = 20$ см равномерно заряжен по всей длине. Суммарный заряд $q = 0,1$мкКл. Найти электрическое поле на прямой, являющейся продолжением стержня, на расстоянии $a = 20$ см от его конца.

Решение



Разобьём стержень на бесконечно малые участки длиной dx. Заряд такого участка равен

$$dQ = \frac{q}{l} \cdot dx.$$

Электрическое поле от заряда dQ в точке A направлено вдоль отрезка и равно:

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dQ}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l} \cdot \frac{dx}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l} \cdot \frac{dx}{(l+a-x)^2}.$$

Электрическое поле от всего стержня получаем интегрированием:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l} \int\limits_0^l \frac{dx}{(l+a-x)^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l} \left(\frac{1}{l+a-x} \right) \Bigg|_0^l =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{l+a} \right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a(l+a)}.$$

Подставляем числовые значения:

$$E = \frac{0,1 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,2 \cdot (0,2+0,2)} = 11 \ \frac{\text{кВ}}{\text{м}}.$$

3 Векторные поля

Наряду с законом Кулона существуют иные эквивалентные формулировки законов, описывающих стационарные электрическое поле. Сначала напомним основы векторного анализа.

Если каждой точке пространства сопоставлено некоторое число $\varphi(x, y, z)$, говорят, что задана скалярная функция или скалярное поле. Если сопоставлен некоторый вектор $\mathbf{v}(x, y, z)$, говорят, что задана векторная функция или векторное поле. Скалярному полю можно сопоставить векторное поле с помощью дифференцирования

$$\operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{e}_z, \tag{9}$$

где $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ – орты декартовой системы координат. Поскольку функции сопоставлена функция, grad – это оператор, и полученное векторное поле называется градиентом $\varphi(x, y, z)$.

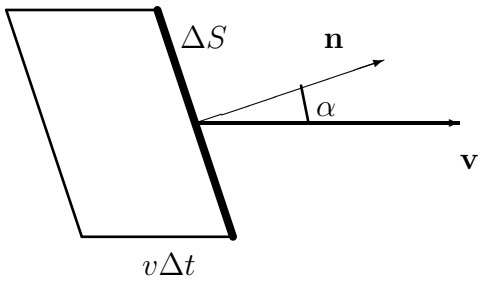


Рис. 1: Вычисление потока жидкости через поверхность ΔS.

Приращение функции $\varphi(x, y, z)$ при смещении на отрезок $d\mathbf{l} = \mathbf{e}_x dx + \mathbf{e}_y dy + \mathbf{e}_z dz$ равно

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\, dz,$$

что можно представить в виде

$$d\varphi = \mathrm{grad}\varphi \cdot d\mathbf{l}. \tag{10}$$

Перейдем к векторным полям. Для наглядности будем говорить о векторном поле скорости, который характеризует течение жидкости, обычно несжимаемой.

3.1 Поток

Объём жидкости, протекающей в единицу времени через некоторую воображаемую поверхность S, называется потоком жидкости через эту поверхность. Чтобы найти поток, разобьем поверхность на элементарные участки величины ΔS. Из рис. 1 видно, что за время Δt через участок ΔS пройдет объём жидкости, равный $\Delta V = \Delta S \cos\alpha \cdot v\Delta t$.

Разделив этот объём на промежуток времени Δt, найдем поток через поверхность ΔS:

$$\Delta\Phi = \Delta V/\Delta t = \Delta S\, v\, \cos\alpha.$$

Перейдя к дифференциалам, получим, что

$$d\Phi = v\, \cos\alpha \cdot dS. \tag{11}$$

Формулу (11) можно написать ещё двумя способами. Во-первых, если учесть, что $v\ \cos\alpha$ даёт проекцию вектора скорости на нормаль $\mathbf{n}$ к площадке dS, можно представить (11) в виде

$$d\Phi = v_n\, dS. \tag{12}$$

Во-вторых, можно ввести вектор $d\mathbf{S}$, модуль которого равен величине площадки dS, а направление совпадает с направлением нормали к площадке $\mathbf{n}$:

$$d\mathbf{S} = dS \cdot \mathbf{n}.$$

Поскольку выбор направления вектора $\mathbf{n}$ условен (его можно направить как в одну сторону от площадки, так и в другую), $d\mathbf{S}$ является не истинным вектором, а псевдовектором. Угол α в формуле (11) есть угол между векторами $\mathbf{v}$ и $d\mathbf{S}$. Следовательно, эту формулу можно написать в виде

$$d\Phi = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}. \tag{13}$$

Просуммировав потоки через все элементарные площадки, на которые мы разбили поверхность S, получим поток жидкости через S:

$$\Phi = \int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \int_S v_n dS. \tag{14}$$

Аналогичное выражение, написанное для произвольного векторного поля $\mathbf{a}$ называется потоком вектора $\mathbf{a}$ через поверхность S. В соответствии с этим определением поток жидкости может быть назван потоком вектора $\mathbf{v}$ через соответствующую поверхность.

Поток вектора есть алгебраическая величина, причём знак его зависит от выбора направления нормали к элементарным площадкам, на которые разбивается поверхность S при вычислении потока. Изменение направления нормали на противоположное изменяет знак у a_n, а следовательно, и знак потока. В случае замкнутых поверхностей принято вычислять поток, "вытекающий"из охватываемой поверхностью области наружу. Соответственно в качестве $\mathbf{n}$ в дальнейшем будет всегда подразумеваться обращённая наружу (т. е. внешняя) нормаль.

3.2 Дивергенция

Пусть нам дано поле вектора скорости несжимаемой неразрывной жидкости. Возьмём в окрестности точки P воображаемую замкнутую поверхность S. Если в объёме V, ограниченном поверхностью, жидкость не возникает и не исчезает, то поток, вытекающий наружу через поверхность, будет, очевидно, равен нулю. Отличие потока жидкости Φ от нуля будет указывать на то, что внутри поверхности

имеются источники или стоки жидкости, то есть точки, в которых жидкость поступает в объём (источники) либо удаляется из объёма (стоки). Величина потока определяет суммарную алгебраическую мощность источников и стоков. При преобладании источников над стоками поток будет положительным, при преобладании стоков - отрицательным. Отношение потока Φ, к объёму V, из которого он вытекает:

$$\Phi/V \tag{15}$$

даёт среднюю удельную мощность источников, заключенных в объёме V. Под мощностью источника (стока) понимается объём жидкости, выделяемый (поглощаемый) в единицу времени. Сток можно рассматривать как источник с отрицательной мощностью.

В пределе при стремлении V к нулю, то есть при стягивании объёма V к точке P, выражение (15) даст удельную мощность источников в точке P, которую называют дивергенцией вектора $\mathbf{v}$ (обозначается div $\mathbf{v}$). Итак

$$\text{div } \mathbf{v} = \lim_{V\to 0} \frac{\Phi}{V} = \lim_{V\to 0} \frac{1}{V} \oint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}. \tag{16}$$

Интеграл берется по произвольной замкнутой поверхности S, окружающей точку P; V - объём области Ω, ограниченной поверхностью S; кружок у знака интеграла указывает на то, что интегрирование производится по замкнутой поверхности. Строго говоря, не только объём V должен стремиться к нулю, но и размеры этой области. Тогда гладкость функции $\mathbf{v}$ обеспечивает независимость предела от конкретного вида области Ω. Аналогично определяется дивергенция любого вектора $\mathbf{a}$.

Из определения (16) следует, что дивергенция есть скалярная функция координат, определяющих положения точек в пространстве (кратко - функция точки). Определение (16) является самым общим, не зависящим от вида координатной системы.

Найдем выражение для дивергенции в декартовой системе координат. Рассмотрим в окрестности точки P с координатами (x, y, z) малую область в виде параллелепипеда с ребрами, перпендикулярными к координатным осям. Поток вектора через поверхность параллелепипеда образуется из потоков, текущих через каждую из шести граней в отдельности. Найдем поток через пару граней, перпендикулярных к оси x. Внешняя нормаль $\mathbf{n}_2$ к грани 2 совпадает с направлением оси x. Следовательно, для точек этой грани $v_n = v_x$. Внешняя нормаль $\mathbf{n}_1$ к грани 1 имеет направление, противоположное оси x. Поэтому для точек этой грани $v_n = -v_x$. Поток через грань 2 можно записать в виде

$$< v_x(x + \Delta x, y, z) > \Delta y \Delta z,$$

где $< v_x(x+\Delta x, y, z) >$ среднее значение v_x на грани 2. Поскольку непрерывная функция достигает среднего значения в некоторой точке интервала усреднения

$$< v_x(x+\Delta x, y, z) >= v_x(x+\Delta x, y^{**}, z^{**}),$$

где y^{**}, z^{**} – координаты некоторой точки на грани 2.

Аналогично выражаем поток через грань 1

$$-v_x(x, y^*, z^*)\Delta y \Delta z,$$

где y^*, z^* – координаты некоторой точки на грани 1, которые могут отличаться от y^{**}, z^{**}.

Суммарный поток через грани 1 и 2 определяется выражением

$$\left(v_x(x+\Delta x, y^{**}, z^{**}) - v_x(x, y^*, z^*)\right)\, \Delta y \Delta z,$$

которое после умножения и деления на Δx принимает вид

$$\frac{v_x(x+\Delta x, y^{**}, z^{**}) - v_x(x, y^*, z^*)}{\Delta x}\, \Delta V.$$

При стремлении $\Delta y \Delta z$ к нулю координаты y^*, z^* и y^{**}, z^{**} стремятся к y, z:

$$\frac{v_x(x+\Delta x, y, z) - v_x(x, y, z)}{\Delta x} \Delta V.$$

Устремив теперь Δx к нулю, получаем

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}\, \Delta V.$$

Путём аналогичных рассуждений можно получить выражения для потоков через пары граней, перпендикулярных к осям y и z, и для полного потока через всю замкнутую поверхность

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\, \Delta V.$$

Разделив это выражение на ΔV, найдем дивергенцию вектора $\mathbf{v}$ в точке (x, y, z):

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \tag{17}$$

Произвольную область можно разбить на малые подобласти, и воспользоваться для каждой из них соотношением (16). Все интегралы по внутренним поверхностям сократятся, так как они входят в сумму с разными знаками при интегрировании по двум прилегающим подобластям, и останется лишь интеграл по внешней границе. Получающееся равенство

$$\int_V \text{div } \mathbf{v}\, dV = \oint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \tag{18}$$

называется теоремой Остроградского - Гаусса.

3.3 Циркуляция

Обратимся снова к течению идеальной несжимаемой жидкости. Представим себе замкнутую линию - контур Г. Предположим, что каким-то способом мы заморозим мгновенно жидкость во всем объёме, за исключением очень тонкого замкнутого канала постоянного сечения, включающего в себя контур Г. В зависимости от характера поля вектора скорости жидкость в образовавшемся канале окажется либо неподвижной, либо будет двигаться вдоль контура (циркулировать) в одном из двух возможных направлений. В качестве меры этого движения естественно взять величину, равную произведению скорости жидкости в канале на длину контура L. Можно показать, что эта величина равна циркуляции векторной функции $\mathbf{v}$ по контуру Г, определяемой как интеграл

$$C = \oint_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\Gamma} v_l \; dl, \tag{19}$$

который записан здесь в двух вариантах, v_l – проекция вектора $\mathbf{v}$ на бесконечно малый отрезок контура $d\mathbf{l}$.

3.4 Ротор

Можно ввести понятие удельной циркуляции, то есть рассматривать отношение циркуляции C к площади поверхности S, "обтекаемой"циркуляцией. При конечных размерах поверхности S отношение C/S даёт среднее значение удельной циркуляции. Это значение характеризует свойства поля, усреднённые по поверхности S. Чтобы получить характеристику поля в точке P, нужно уменьшать размеры поверхности, стягивая её в точку P. При этом отношение C/S может стремиться к некоторому пределу, который характеризует свойства поля в точке P. Для гладких векторных функций $\mathbf{v}$ и при выборе последовательности поверхностей, не только убывающих по площади, но и стремящихся к некоторой плоскости, предел действительно существует.

Возьмём воображаемый контур Г, лежащий в плоскости, проходящей через точку P, и рассмотрим выражение

$$\lim_{S \to 0} \frac{C}{S} = \lim_{S \to 0} \frac{1}{S} \oint_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}, \tag{20}$$

где C – циркуляция вектора $\mathbf{v}$ по контуру Г, S – площадь, охватываемая контуром.

Обратим внимание на ориентацию контура в пространстве. Эта ориентация может быть задана направлением положительной нормали $\mathbf{n}$ к плоскости контура. Положительной считается нормаль,

связанная с направлением обхода контура при интегрировании правилом правого винта: направление большого пальца правой руки, когда остальные сжатые пальцы указывают направлением обхода контура. Определяя предел (20) в одной и той же точке P для разных направлений $\mathbf{n}$, мы будем получать различные значения, причём для противоположных направлений эти значения отличаются только знаком, поскольку изменение направления $\mathbf{n}$ на противоположное эквивалентно изменению направления обхода по контуру во время интегрирования, что вызовет лишь изменение знака у циркуляции. Для какого-то направления нормали величина (20) в данной точке окажется максимальной. Таким образом, величина (20) ведет себя как проекция некоторого вектора на направление нормали к плоскости контура, по которому берется циркуляция. Максимальное значение величины (20) определяет модуль этого вектора, а направление положительной нормали $\mathbf{n}$, при котором достигается максимум, даёт направление вектора. Этот вектор называется ротором (или вихрем) вектора $\mathbf{v}$. Обозначается он символом $\mathrm{rot}\mathbf{v}$.

Используя это обозначение, можно записать выражение (20) в виде

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = \lim_{S\to 0}\frac{C}{S} = \lim_{S\to 0}\frac{1}{S}\oint_{\Gamma}\mathbf{v}\cdot d\mathbf{l}. \tag{21}$$

Наглядное представление о роторе вектора $\mathbf{v}$ можно получить, представив себе небольшую лёгкую крыльчатку, помещённую в данную точку текущей жидкости. В тех местах, где ротор отличен от нуля, крыльчатка будет вращаться, причём с тем большей скоростью, чем больше по величине проекция ротора на ось крыльчатки. Выражение (21) определяет вектор $\mathrm{rot}\mathbf{v}$. Это определение является самым общим, не зависящим от вида координатной системы. Для того чтобы найти выражения для проекций вектора $\mathrm{rot}\mathbf{v}$ на оси декартовой системы координат, нужно определить значения величины (21) для таких ориентаций площадки S, при которых нормаль $\mathbf{n}$ к площадке совпадает с одной из осей x, y, z. Если, например, направить $\mathbf{n}$ по оси x, то (21) превратится в $\mathrm{rot}_x\mathbf{v}$. Контур Γ расположен в этом случае в плоскости, параллельной координатной плоскости y, z. Возьмём этот контур в виде прямоугольника со сторонами Δy и Δz (рис. 2; ось x имеет на этом рисунке направление на нас; указанное на рисунке направление обхода связано с направлением оси x правилом правого винта). Участок 1 контура противоположен по направлению оси z. Поэтому v_l на этом участке совпадает с $-v_z$, а на участке 3 – с v_z. Следовательно, вклад этой пары сторон прямоугольника в циркуляцию можно представить в виде

$$(< v_z(x, y + \Delta y, z) > - < v_z(x, y, z) >)\Delta z,$$

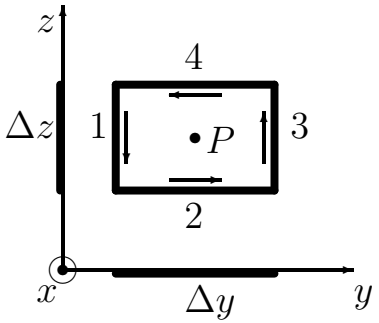


Рис. 2: Вычисление циркуляции по прямоугольному контуру.

где <> - средние значения на сторонах прямоугольника 3 и 1 соответственно. Поскольку непрерывная функция достигает среднего значения в некоторой точке интервала усреднения, это выражение можно записать как

$$(v_z(x, y + \Delta y, z^*) - v_z(x, y, z^{**}))\Delta z,$$

где z^*, z^{**} – координаты некоторых точек на соответствующих сторонах рассматриваемого прямоугольника. После умножения и деления на Δy получаем

$$\frac{v_z(x, y + \Delta y, z^*) - v_z(x, y, z^{**})}{\Delta y}\ \Delta S,$$

где ΔS – площадь прямоугольника.

При стремлении Δz к нулю координаты z^* и z^{**} стремятся к z:

$$\frac{v_z(x, y + \Delta y, z) - v_z(x, y, z)}{\Delta y}\Delta S.$$

Устремив теперь Δy к нулю, получаем

$$\frac{\partial v_z}{\partial y}\ \Delta S.$$

Рассуждая аналогично, найдем вклад второй пары сторон прямоугольника в циркуляцию. Разделив циркуляцию на площадь ΔS, получим выражение $x-$ компоненты вектора rot$\mathbf{v}$

$$(\mathrm{rot}\,\mathbf{v})_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}.$$

Для остальных компонент выражения получаются переобозначением или циклической перестановкой координат $x \to y \to z \to x$:

$$(\operatorname{rot} \mathbf{v})_y = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}$$

$$(\operatorname{rot} \mathbf{v})_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y},$$

где учтено, что мы всегда выбираем правую систему координат. В левой системе координат знаки были бы иными. Перейдя от покомпонентной записи к векторной, получаем:

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\mathbf{e}_z. \quad (22)$$

Произвольную поверхность можно разбить на малые участки поверхности, и воспользоваться для каждой из них соотношением (21). При этом в точках гладкости поверхности соответствующие малые участки стремятся к касательной плоскости. Несложно рассмотреть и кусочно-гладкие поверхности, выделив линии излома. Все интегралы по внутренним участкам контуров сократятся, так как они входят в сумму с разными знаками при интегрировании по двум прилегающим подобластям, и останется лишь интеграл по внешнему контуру Г, ограничивающему рассматриваемую поверхность S. Получающееся равенство

$$\int_S \operatorname{rot}\ \mathbf{v}\ d\mathbf{S} = \oint_\Gamma \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} \quad (23)$$

называется **теоремой Стокса**.

4 Циркуляция статического электрического поля

Запишем закон Кулона (7) для напряжённости электрического поля $\mathbf{E}$ в сферических координатах:

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \qquad E_\theta = E_\alpha = 0, \quad (24)$$

где r, θ, α – сферические координаты.

Вычислим $\operatorname{rot} \mathbf{E}$ для такого векторного поля, исключив из рассмотрения особую точку $r = 0$:

$$(\operatorname{rot} \mathbf{E})_r = \frac{1}{r\sin\theta}\ \frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta E_\alpha) - \frac{1}{r\sin\theta}\ \frac{\partial}{\partial\alpha}E_\theta = 0$$

$$(\operatorname{rot}\mathbf{E})_\theta = \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\alpha}E_r - \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}(rE_\alpha) = 0$$

$$(\operatorname{rot}\mathbf{E})_\alpha = \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}(rE_\theta) - \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial\theta}E_r = 0.$$

Эти равенства для компонет можно записать в виде одного векторного равенства:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0. \tag{25}$$

Если взять окружность, охватывающую точку $r = 0$ с центром в этой точке, подынтегральное выражение в (20) равно нулю, так как вектор $\mathbf{E}$ перпендикулярен этой линии, и значит, вектору $d\mathbf{l}$. Раз циркуляция равна нулю, равен нулю и предел при стремлении радиуса окружности к нулю. Поэтому можно доопределить $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$ и в этой особой точке.

Этим же свойством обладает и сумма полей, создаваемых несколькими зарядами, то есть статическое электрическое поле всегда имеет нулевой $\operatorname{rot}\mathbf{E}$. В силу теоремы Стокса из $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$ следует равенство нулю циркуляции $\mathbf{E}$ по произвольному контуру:

$$\oint_\Gamma \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = 0. \tag{26}$$

Рассмотрим циркуляцию электрического поля по малому прямоугольному контуру, первая и третья стороны которого параллельны некоторой поверхности, причём первая лежит по одну сторону поверхности, третья – по другую, а две других, ещё более коротких стороны, замыкают этот прямоугольник. В силу (26) циркуляция равна нулю. Устремив к нулю длины второй и четвертой сторон, то есть сужая прямоугольник, мы сделаем их вклады в циркуляцию пренебрежимыми в естественном предположении, что напряжённость электрического поля конечна. Поэтому вклад в циркуляцию первой и третьей стороны равны по величине и противоположны по знаку. Сделав эти стороны достаточно малыми, чтобы поле вдоль каждой можно было считать постоянным, и поэтому вычислять интегралы просто умножением на длину отрезка $d\mathbf{l}$, получаем равенство

$$\mathbf{E}_1\cdot d\mathbf{l} = \mathbf{E}_2\cdot d\mathbf{l}, \tag{27}$$

которое означает, что проекции $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_1$ на направление $d\mathbf{l}$ совпадают. Поскольку мы можем выбрать прямоугольник с произвольным касательным к рассматриваемой поверхности направлением, получаем равенство касательных компонент напряжённости электрического поля по обе стороны произвольной поверхности.

Другими словами касательные компоненты напряжённости статического электрического поля непрерывны при переходе через произвольную поверхность:

$$\Delta \mathbf{E}_\tau = 0. \tag{28}$$

В следующем параграфе покажем, что нормальная компонента может иметь скачок.

Отметим, что мы употребляем уточнение "статическое"электрическое поле, поскольку циркуляция и ротор электрического поля, создаваемого изменяющимся во времени магнитным полем отличны от нуля.

5 Поток электрического поля

Теперь вычислим $\operatorname{div}\mathbf{E}$ для напряжённости электрического поля, создаваемого точечным зарядом (24), исключив из рассмотрения особую точку $r = 0$:

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}(r^2 E_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta E_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\alpha}\,E_\alpha = 0. \tag{29}$$

В силу теоремы Остроградского - Гаусса (29) следует равенство нулю потока $\mathbf{E}$ через любую замкнутую поверхность, не охватывающую точку $r = 0$.

Если взять сферу, охватывающую точку $r = 0$ с центром в этой точке, в (16) получается интеграл

$$\oint_S E \cdot dS,$$

так как вектор $\mathbf{E}$ параллелен нормали, и значит, вектору $d\mathbf{S}$. Этот интеграл несложно вычислить, поскольку E одинаково во всех точках такой сферы:

$$\oint_S E \cdot dS = E(r)\oint_S \cdot dS = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot 4\pi\varepsilon_0 r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}. \tag{30}$$

Теперь мы можем вычислить поток и через поверхность, охватывающую точку $r = 0$. Достаточно выделить сферическую окрестность этой точки, если таковая находится внутри рассматриваемой поверхности, вычислить поток через неё и через поверхность, состоящую из двух частей: интересующей нас поверхности и построенной сферы. Первый поток равен (30), а второй – нулю в силу равенства нулю $\operatorname{div}\mathbf{E}$ в области, ограниченной построенной поверхностью. Отметим, что связность поверхности в теореме Остроградского - Гаусса не требуется. Таким образом, поток через поверхность, охватывающую точечный заряд Q, равен Q/ε_0.

Установленное свойство очевидным образом распространяется и на сумму полей, создаваемых несколькими зарядами:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \Sigma Q_i, \tag{31}$$

где Q_i – все заряды, охваченные поверхностью S. Этот закон называется **теоремой Гаусса**.

С помощью теоремы Гаусса гораздо проще, чем с использованием закона Кулона, решаются некоторые электростатические задачи. Продемонстрируем это на примере поля равномерно заряженной плоскости.

Пусть бесконечная плоскость равномерно заряжена с поверхностной плотностью σ.

Сначала воспользуемся симметрией системы зарядов. Будем использовать декартову систему координат с осью z перпендикулярной заданной плоскости и началом координат в некоторой точке на этой плоскости.

В произвольной точке пространства вектор напряжённости электрического поля $\vec{E}$ может быть направлен только по z. Предположим противное: пусть в некоторой точке пространства есть составляющая $E_x \neq 0$. Повернём нашу систему зарядов вокруг прямой, параллельной оси z и проходящей через эту точку, на 180^0. Тогда и поле должно повернуться, то есть составляющая E_x станет $-E_x$. С другой стороны, заряженная плоскость от поворота не изменилась, поэтому ответ должен сохраниться. Эти свойства совместимы, только если $E_x = -E_x$, что противоречит предположению $E_x \neq 0$. Аналогично доказываем равенство нулю E_y. Поскольку

$$E_x = E_y = 0,$$

из трёх декартовых компонент $\vec{E}$ осталось найти лишь одну $E_z(x, y, z)$.

Также от противного докажем, что $E_z(x, y, z)$ не зависит от x, y. Пусть в двух разных точках на плоскости $z = const$ имеем два разных значения $E_{z,1} \neq E_{z,2}$. Сдвинем нашу систему зарядов по x, y так, чтобы первая точка перешла на место второй. Тогда и поле должно сдвинуться, и во второй точке будет $E_{z,1}$. С другой стороны, заряженная плоскость от сдвига не изменилась, поэтому ответ должен сохраниться. Эти свойства совместимы, только если $E_{z,1} = E_{z,2}$, что противоречит предположению $E_{z,1} \neq E_{z,2}$. Следовательно из всех неизвестных в задаче осталась лишь одна функция одного аргумента $E_z(z)$.

Ещё одно свойство $E_z(z) = -E_z(-z)$ также легко получается из симметрии задачи относительно поворота вокруг оси x, поскольку

при таком повороте точка $(0, 0, z)$ переходит в $(0, 0, -z)$, а заряженная плоскость не изменяется.

По теореме Гаусса поток вектора напряжённости электрического поля $\vec{E}$ через замкнутую поверхность S равен делённой на ε_0 сумме всех зарядов, охваченных поверхностью S (31).

Выберем в качестве S поверхность параллелепипеда $|x| < a$, $|y| < a$, $|z| < b$. Поток через всю поверхность складывается из потоков через шесть граней параллелепипеда. Рассмотрим грань $x = a$. Нормаль, а значит и вектор $d\mathbf{S}$, параллельны оси x, а вектор $\mathbf{E}$ имеет нулевую $x-$ компоненту. Поэтому подынтегральное скалярное произведение в (31) равно нулю. Поэтому же равны нулю потоки через все четыре боковые грани. Рассмотрим грань $z = b$. Нормаль, а значит и вектор $d\mathbf{S}$, параллельны оси z, и вектор $\mathbf{E}$ имеет пока неизвестную $z-$ компоненту. Поэтому подынтегральное скалярное произведение в (31) равно $E_z(b) \cdot dS$, и весь интеграл равен $E_z(b) \cdot 4a^2$. Поток через грань $z = -b$ такой же, поскольку и нормаль, и вектор $\mathbf{E}$ направлены там в противоположную сторону.

Теперь применим теорему Гаусса (31):

$$2 \cdot E_z(b) \cdot 4a^2 = Q/\varepsilon_0.$$

Внутри параллелепипеда находится квадратный участок плоскости $|x| < a$, $|y| < a$, площадь которого равна $4a^2$. Поскольку поверхностная плотность заряда равна σ, заряд этого квадрата равен $Q = \sigma \cdot 4a^2$. Поскольку b есть произвольное положительное значение z, при $z > 0$ получаем

$$E_z(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0},$$

а при $z < 0$ – то же значение со знаком минус. Как видим, поле однородно в каждом из полупространство, выше и ниже равномерно заряженной плоскости.

На плоскости $z = 0$ полученная напряжённость электрического поля имеет скачок

$$\Delta E_z = \sigma/\varepsilon_0.$$

Для любой гладкой поверхности с поверхностной плотностью заряда σ аналогичным образом можно доказать, что на ней существует такой же скачок

$$\Delta E_n = \sigma/\varepsilon_0. \tag{32}$$

Достаточно рассмотреть малый параллелепипед, две грани которого лежат по разные стороны поверхности и параллельны ей, и устремить к нулю высоту параллелепипеда, чтобы площади остальных четырёх граней, а значит и потоки через них, были пренебрежимыми.

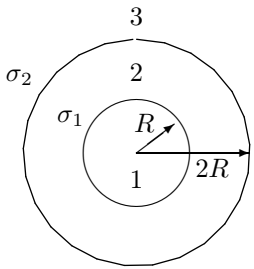
При этом делается естественное предположение, что все компоненты напряжённости электрического поля конечны.

Отметим, что в настоящем параграфе, в отличие от предыдущего, мы не употребляем уточнение "статическое"электрическое поле, поскольку таковы же поток и дивергенция электрического поля, изменяющегося во времени, хотя здесь их величины получены только для статического поля.

Задача 6.

Найти электрическое поле, создаваемое двумя равномерно заряженными концентрическими сферами радиусов R и $2R$ на расстоянии $r = 1,5R$ от центра. Построить график зависимости напряжённости электрического поля от расстояния от центра Плотности зарядов на сферах равны $\sigma_1 = 4\sigma$, $\sigma_2 = \sigma$, где $\sigma = 30$ нКл/м^2.

<u>*Решение*</u>



Сначала воспользуемся симметрией системы зарядов. Будем использовать сферическую систему координат с центром в центре симметрии задачи.

1. В произвольной точке пространства вектор напряжённости электрического поля $\vec{E}$ может быть направлен только по радиусу. Предположим противное: пусть в некоторой точке пространства есть составляющая $\vec{E}_\perp \neq 0$, перпендикулярная радиусу, то есть лучу, соединяющему эту точку с центром. Повернём нашу систему зарядов вокруг этого луча на 180^0. Тогда и поле должно повернуться, то есть составляющая $\vec{E}_\perp$ станет $-\vec{E}_\perp$. С другой стороны, система зарядов от поворота не изменилась, поэтому ответ должен сохраниться. Эти свойства совместимы, только если $\vec{E}_\perp = -\vec{E}_\perp$, что противоречит предположению $\vec{E}_\perp \neq 0$. Поскольку установлено, что

$$E_\theta = E_\alpha = 0,$$

из трёх сферических компонент $\vec{E}$ осталось найти лишь одну $E_r(r, \theta, \alpha)$,.

2. Также от противного докажем, что $E_r(r, \theta, \alpha)$ не зависит от θ, α. Пусть в двух разных точках на сфере радиуса r имеем два разных значения $E_{r,1} \neq E_{r,2}$. Повернём нашу систему зарядов вокруг центра так, чтобы первая точка перешла на место второй. Тогда и поле должно повернуться, и во второй точке будет $E_{r,1}$. С другой стороны, система зарядов от поворота не изменилась, поэтому ответ должен сохраниться. Эти свойства совместимы, только если $E_{r,1} = E_{r,2}$, что противоречит предположению $E_{r,1} \neq E_{r,2}$. Следовательно из всех неизвестных в задаче осталась лишь одна функция одного аргумента $E_r(r)$.

3. По теореме Гаусса поток вектора напряжённости электрического поля $\vec{E}$ через замкнутую поверхность равен

$$\oint\limits_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Выберем сферическую поверхность радиуса r и применим к ней теорему Гаусса:

$$\oint\limits_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint\limits_S E_r \cdot dS = E_r(r) \oint\limits_S dS = E_r(r)S = E_r(r) \cdot 4\pi r^2.$$

Следовательно

$$E_r(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

где Q – суммарный заряд внутри сферы радиуса r.

Рассмотрим отдельно три области:

3.1. $r < R$.

В этом случае суммарный заряд $Q = 0$ и $E_r = 0$.

3.2. $R < r < 2R$.

Внутри сферы радиуса r находится суммарный заряд $Q = \sigma_1 \cdot S = \sigma_1 \cdot 4\pi R^2$. Напряжённость электрического поля равна

$$E_r(r) = \frac{\sigma_1 \cdot 4\pi R^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{4\sigma}{\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{R}{r}\right)^2.$$

3.3. $r > 2R$.

Суммарный заряд внутри сферы:

$$Q = Q_1 + Q_2 = \sigma_1 \cdot 4\pi R^2 + \sigma_2 \cdot 4\pi (2R)^2 =$$

$$= 4\sigma \cdot 4\pi R^2 + \sigma \cdot 4\pi 4R^2 = 8\sigma \cdot 4\pi R^2.$$

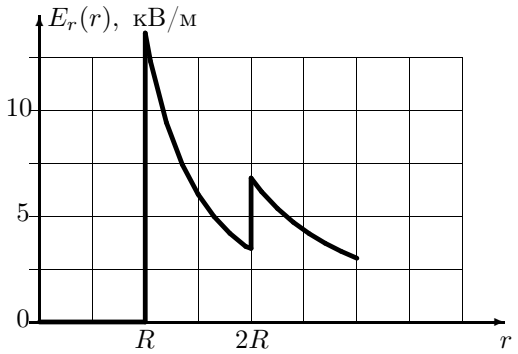
Напряжённость электрического поля равна

$$E_r(r) = \frac{8\sigma \cdot 4\pi R^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{8\sigma}{\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{R}{r}\right)^2.$$

4. Вычисляем напряжённость в точке $r = 1,5R$:

$$E_r(r) = \frac{4 \cdot 30 \cdot 10^{-9}}{8,85 \cdot 10^{-12}} \cdot \left(\frac{1}{1,5}\right)^2 = 6030\frac{\text{В}}{\text{м}} = 6,03\frac{\text{кВ}}{\text{м}}.$$

5. Строим график $E_r(r)$:



6 Потенциал статического электрического поля

Рассмотрим поле неподвижного точечного заряда Q, находящегося в начале сферических координат r, θ, α. В соответствии с закон Кулона (7) заряд Q создаёт в окружающем пространстве электрическое поле.

Следовательно, на помещённый в это поле заряд q действует сила

$$\mathbf{F} = q\,\mathbf{E} = q\,\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\frac{\mathbf{r}}{r}, \tag{33}$$

где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор точки, в которой находится заряд q.

Вычислим работу, которую совершает сила $\mathbf{F}$ при перемещении заряда q из точки $\mathbf{r}_1$ в точку $\mathbf{r}_2$ вдоль кривой L. Вектор малого перемещение вдоль этой кривой обозначаем $d\mathbf{l}$. Тогда

$$A = \int\limits_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} dA = \int\limits_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}.$$

Поскольку сила направлена по радиусу, в скалярном произведении остаётся только перемещение в радиальном направлении, и

$$A = \int\limits_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} F_r \, dr = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} \, dr.$$

Получаем

$$A = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \tag{34}$$

В частности, если мы возвращаем заряд q в исходную точку, работа равна нулю. Это позволяет использовать понятие потенциальной энергии заряда q в поле заряда Q

$$W(r) = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r}, \tag{35}$$

и говорить, что работа совершается за счёт убыли потенциальной энергии, как это должно быть в соответствии с законом сохранения энергии.

Как всегда, потенциальная энергия определена с точностью до произвольной аддитивной постоянной, значение которой в (35) выбрано так, чтобы при удалении заряда q на бесконечность $W(\infty) = 0$.

Удобно исключить из рассмотрения заряд q за счёт введения потенциала $\varphi = W/q$, который характеризует собственно поле, создаваемое зарядом Q:

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}. \tag{36}$$

Сопоставляя формулы (36) и (7), видим, что

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}.$$

По существу, это свойство было использовано при построении потенциала, если учесть, что сила и потенциальная энергия отличаются от напряжённости электрического поля и потенциала умножением на один и тот же заряд q.

Можем добавить равенства для остальных, равных нулю, компонент

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}, \quad E_\alpha = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha},$$

чтобы получить векторное соотношение

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi, \tag{37}$$

соответствующее определению оператора градиента.

Как всякое векторное равенство, полученная связь напряжённости электрического поля с потенциалом (37) не зависит от системы координат.

В силу принципа суперпозиции напряжённость электрического поля, создаваемого системой зарядов, равна сумме напряжённостей электрических полей, создаваемых каждым зарядом по отдельности. Поэтому равенство напряжённости поля градиенту потенциала (37) справедливо для произвольного стационарного электрического поля.

Задача 7.

Два заряда $Q_1 = 6$ нКл и $Q_2 = 3$ нКл находятся на расстоянии $d_1 = 60$ см. Какую работу надо совершить, чтобы сократить расстояние до $d_2 = d_1/2$?

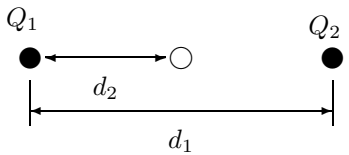
Решение

Будем считать, что заряд Q_1 неподвижен, а заряд Q_2 приближается к нему. Совершенная работа равна

$$A = Q_2(\varphi_2 - \varphi_1),$$

где φ_1 и φ_2 – электрические потенциалы, создаваемые зарядом Q_1 в месте расположения заряда Q_2:

$$\varphi_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 d_1}; \quad \varphi_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 d_2} = \frac{2Q_1}{4\pi\varepsilon_0 d_1}.$$



Совершенная работа равна

$$A = Q_2\left(\frac{2Q_1}{4\pi\varepsilon_0 d_1} - \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 d_1}\right) = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 d_1}.$$

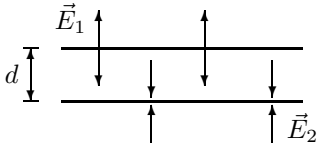
Подставляем числовые значения:

$$A = \frac{6 \cdot 10^{-9} \cdot 3 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,6} = 2,7 \cdot 10^{-7} \text{ Дж}.$$

Задача 8.

Две параллельные плоскости находятся на расстоянии $d_1 = 0,6$ см. Они равномерно заряжены с поверхностной плотностью $\sigma_1 = 2$ мкКл/м^2 и $\sigma_2 = -0,8$ мкКл/м^2. Найти напряжение между ними.

Решение



Напряжённость электрического поля от бесконечной заряженной плоскости направлена перпендикулярно плоскости и по модулю равна

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

В промежутке между разноимённо заряженными плоскостями электрические поля складываются:

$$E = E_1 + E_2 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\varepsilon_0}.$$

Разность потенциалов при однородном поле равна скалярному произведению напряжённости поля на вектор перемещения. Поскольку эти векторы параллельны, перемножаем их модули:

$$U = E \cdot d = \frac{d \cdot (\sigma_1 - \sigma_2)}{2\varepsilon_0}.$$

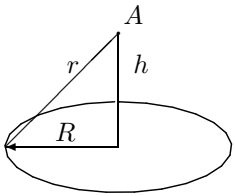
Подставляем числовые значения:

$$U = \frac{0,006 \cdot (2 \cdot 10^{-6} + 0,8 \cdot 10^{-6})}{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} = 950 \text{ В}.$$

Задача 9.

На окружности радиуса $R = 10$ см равномерно распределен заряд с линейной плотностью $\tau = 800$ нКл/м. Найти распределение потенциала вдоль оси окружности и его значение в точке на оси, лежащей на расстоянии $h = 10$ см от центра окружности.

Решение



Разобьём кольцо на бесконечно малые участки длиной dl. Заряд такого участка равен

$$dQ = \tau dl.$$

Потенциал, создаваемый в точке А зарядом dQ равен

$$d\varphi = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r},$$

где $r = \sqrt{R^2 + h^2}$ – расстояние от точки А до заряда dQ, одинаковое для всех участков кольца.

Суммарный потенциал от всех участков кольца получаем интегрированием:

$$\varphi = \int d\varphi = \int \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r} \cdot \int dQ =$$

$$= \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r} \cdot \int dl = \frac{\tau \cdot 2\pi R}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r} = \frac{\tau R}{2\varepsilon_0 \cdot \sqrt{R^2 + h^2}}.$$

Подставляем числовые значения:

$$\varphi = \frac{0,1 \cdot 800 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot \sqrt{(0,1)^2 + (0,1)^2}} = 3,2 \cdot 10^4 \text{ В}.$$

Задача 10.

Пылинка массой $m = 200$ мкг с зарядом $Q = 40$ нКл ускорилась за счёт разности потенциалов $U = 200$ В, и её скорость стала $v = 10$ м/с. Какой была её начальная скорость v_0?

Решение

За счёт перемещения в электрическом поле потенциальная энергия пылинки уменьшилась на величину QU. По закону сохранения энергии её кинетическая энергия на столько же возросла:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + QU.$$

Получаем:

$$v_0 = \sqrt{v^2 - \frac{2QU}{m}}.$$

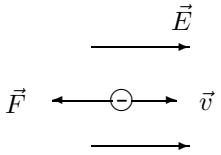
Подставляем числовые значения:

$$v_0 = \sqrt{(10)^2 - \frac{2 \cdot 40 \cdot 10^{-9} \cdot 200}{200 \cdot 10^{-9}}} = 4,47 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Задача 11.

Электрон имел кинетическую энергию $T = 10$ эВ и переместился в точку с меньшим на $U = 8$ В значением потенциала. Какой станет его скорость v?

<u>*Решение*</u>



Так как заряд электрона отрицательный, то в электрическом поле электрон будет тормозиться. Пройдя разность потенциалов U, электрон будет иметь кинетическую энергию

$$\frac{mv^2}{2} = T - eU.$$

где $m,\ e$ – масса и заряд электрона. Отсюда получаем:

$$v = \sqrt{\frac{2(T - eU)}{m}}$$

При прохождении электроном разности потенциалов 8 В его энергия уменьшается на 8 эВ : $T - eU = 10 - 8 = 2$ эВ. Переводим энергию в джоули: $T - eU = 2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 3,2 \cdot 10^{-19}$ Дж.

Скорость электрона:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 3,2 \cdot 10^{-19}}{9,11 \cdot 10^{-31}}} = 0,836 \cdot 10^6\ \frac{\text{м}}{\text{с}} = 836\ \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Список литературы

[1] Денисенко В.В. Решение задач по термодинамике и молекулярной физике: учебное пособие Красноярский государственный университет. Красноярск, 2006.

[2] Иродов И.Е. Задачи по общей физике. Санкт-Петербург: Издательство "Лань". 2001.

[3] Савельев И.В. Курс общей физики. В 3 томах. СПб.: Лань. 2005. Т. 2 : Электричество и магнетизм. Волны. Оптика. 2005. 496 с.

Учебное издание

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ЭЛЕКТРОСТАТИКЕ

Составитель: Валерий Васильевич Денисенко

Подготовлено к изданию РИО БИК СФУ

Подписано в печать 10.04.2012 г. Формат 60×84/16.
Бумага офсетная. Печать плоская.
Усл. печ. л. 1,8. Тираж 100 экз. Заказ 7188

Редакционно-издательский отдел
Библиотечно-издательского комплекса
Сибирского федерального университета
660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79
Тел/факс (391) 201-21-49. E-mail rio@sfu-kras.ru
http://rio.sfu-kras.ru

Отпечатано Полиграфическим центром
Библиотечно-издательского комплекса
Сибирского федерального университета
660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 82а
Тел/факс (391) 206-26-58, 206-26-49
E-mail: print_sfu@mail.ru; http://lib.sfu-kras.ru